Corso di

Analisi Matematica I

ingegneria, lettere: KAA-MAZ

docente: E. Callegari

Prova simulata n. 2

A.A. 2008-2009

25 Ottobre 2008

1. Introduzione

Qui di seguito ho riportato testi, svolgimenti della simulazione di prova scritta che ho fatto sostenere ai miei studenti Sabato 25 Ottobre. Anche questa volta, come per la simulazione di Sabato 11 Ottobre, si è trattato di una prova mista: la prima parte, il cui testo è contenuto nel paragrafo 2, era a risposta multipla, mentre la seconda parte, riportata nel paragrafo 3, era una classica prova scritta con svolgimento.
Anche questa volta la prova si è tenuta con le seguenti modalità:

10.00 inizio dello svolgimento della parte a risposta multipla;

11.15-11.45 intervallo di tempo durante il quale ciascuno studente doveva effettuare il cambio di parte: ovvero consegnare le risposte della parte a risposta multipla e farsi dare il testo della parte con svolgimento;

13.00 termine ultimo per consegnare lo svolgimento della seconda parte.

Nei paragrafi successivi, oltre al testo ho riportato gli svolgimenti dei quesiti e dei problemi, e la distribuzione delle risposte per i quesiti a risposta multipla. Per motivi di tempo, invece, non ho aggiunto le osservazioni sugli errori fatti dagli studenti e i criteri di valutazione utilizzati per la parte con svolgimento.
Conto di fare un'altra simulazione Sabato 8 Novembre, strutturata in modo identico ma sul calcolo differenziale.

2. I parte: quesiti a risp. multipla

Quesito 1.

Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin^2 x}{e^{2x}-1}$ è uguale a:

A $\frac{1}{3}$ B 0 C 1 D $\frac{3}{5}$ E non esiste né finito né infinito F 2

Quesito 2.

Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 6x\left(e^{\frac{3}{x+2}}-1\right)$ è uguale a:

A 1 B $+\infty$ C 18 D 6 E 9 F 2

Quesito 3.

Il $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{1-\cos(\tan x)}$ è uguale a:

A $\frac{1}{2}$ B 1 C 2 D 0 E $+\infty$ F non esiste in $\mathbf{R}^*$

Quesito 4.

Il $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\cos x^2+6x^5}{\ln(1+x^5)+\ln^2(\cos x)}$ è uguale a:

A 0 B 6 C $+\infty$ D 4 E 1 F 2

Quesito 5.

Il $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{e^{x-3}+\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ è uguale a:

A 1 B $-\frac{1}{\pi}$ C $+\infty$ D $\frac{2}{3\pi}-\frac{3\pi}{2}$ E $\frac{2}{3\pi}$ F non esiste in $\mathbf{R}^*$

Quesito 6.

Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x-1}$ è uguale a:

A e^2 B 2 C e D 1 E 0 F $+\infty$

Quesito 7.

Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(\tan x)}{x}$ è uguale a:

A $\frac{\pi}{2}$ B π C 1 D 0 E $+\infty$ F non esiste in $\mathbf{R}^*$

Quesito 8.

Il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^{x-1}\cdot\left(\ln(8+2^x)-\ln(4+2^x)\right)$ è uguale a:

A 2 B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{2}$ D 1 E 0 F $+\infty$

Quesito 9.

Date le funzioni f, g e h definite da $f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))$, $g(x)=\sqrt{\cos(x^2)}-1$ e $h(x)=\sqrt{1+\sqrt{\sin(x^6)}}-1$. Allora per $x\to 0$ si ha:

A $h(x)=o(f(x))$ e $f(x)=o(g(x))$ B $f(x)=o(g(x))$ e $g(x)=o(h(x))$ C $g(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(f(x))$ D $f(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(g(x))$ E $g(x)=o(f(x))$ e $f(x)=o(h(x))$ F $h(x)=o(g(x))$ e $g(x)=o(f(x))$

Quesito 10.

Siano $f(x)=\ln^x(1+x)$, $g(x)=\ln(1+x^x)$ e $h(x)=x\ln x$. Allora, per $x\to+\infty$ si ha:

A $f(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(g(x))$ B $f(x)$ $g(x)$ e $h(x)$ hanno tutte lo stesso ordine C $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine e $f(x)=o(h(x))$ D $h(x)=o(g(x))$ e $g(x)=o(f(x))$ E $h(x)=o(f(x))$ e $f(x)=o(g(x))$ F $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine e $g(x)=o(f(x))$

Quesito 11.

Si considerino le affermazioni:
(a) $x^8=o\left(x^9\right)$ per $x\to 0$;
(b) $x^8=o\left(x^9\right)$ per $x\to+\infty$;
(c) $x^8=o\left(x^7\right)$ per $x\to-\infty$.
Allora quelle vere sono:

A solo **(a)** e **(c)** B solo **(a)** C solo **(c)** D solo **(b)** E nessuna F tutte

Quesito 12.

Sia $f(x)=\tan x+|\sin x|$. Si considerino le affermazioni:
(a) $f(x)=O(x)$ per $x\to 0$;
(b) $f(x)=o(x)$ per $x\to 0$;
(c) $f(x)=o\left(x^2\right)$ per $x\to 0^-$.
Allora quelle vere sono:

A solo **(a)** e **(b)** B solo **(a)** e **(c)** C solo **(c)** D solo **(a)** E nessuna F tutte

3. II parte: problemi da svolgere

Problema 1.

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1-\cos x^2+x^4}\cdot\ln\left(\frac{2x+1}{1-x}\right).$$

Problema 2.

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-\sqrt{x^6+1}+x^2+\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x^3+1}+\ln(1+e^x)+x\sqrt{x^2+1}}$$

Problema 3.

Confrontare per $x\to 0^+$ gli ordini di infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$f(x)=\sqrt{1+2x}-1,\qquad g(x)=x^{1+\frac{1}{\ln|\ln x|}},\qquad h(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}.$$

Problema 4.

Siano $f,g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ due funzioni che tendono a $+\infty$ per $x\to+\infty$. Si supponga inoltre che per $x\to+\infty$ siano asintoticamente equivalenti, cioè che valga $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.
Dire, motivando la risposta, se sono vere oppure no le seguenti affermazioni:

(1) $f(x)-g(x)=o(f(x))$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$.

4. Svolgimenti della I parte

Quesito 1.

Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x + \sin^2 x}{e^{2x} - 1}$ è uguale a:

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ 0 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{E}$ $\frac{3}{5}$ $\boxed{F}$ non esiste né finito né infinito

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	41
	B	5
	C	7
	D	0
	E	0
	F	4
	Non data	2

Soluzione del Quesito 1.

Il limite proposto vale 1.
Per cominciare osserviamo che, per $x \to 0$, si ha:

$$(\sin x)^2 \approx x^2 = o(x)$$

e

$$e^{2x} - 1 \approx 2x.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + \sin^2 x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Quesito 2.

Il $\lim_{x\to +\infty} 6x \left(e^{\frac{3}{x+2}} - 1 \right)$ è uguale a:

$\boxed{A}$ 18 $\boxed{B}$ 6 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ 9 $\boxed{E}$ $+\infty$ $\boxed{F}$ 1

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	38
	B	4
	C	1
	D	4
	E	4
	F	4
	Non data	4

Soluzione del Quesito 2.

Il limite proposto vale 18.
Osserviamo che, per $x \to +\infty$, si ha $\dfrac{3}{x+2} \to 0$ e quindi

$$e^{\frac{3}{x+2}} - 1 \approx \frac{3}{x+2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to +\infty} 6x \cdot \left(e^{\frac{3}{x+2}} - 1 \right) = \lim_{x\to +\infty} 6x \cdot \frac{3}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{18}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{18}{1+0} = 18.$$

Quesito 3.

Il $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{1 - \cos(\tan x)}$ è uguale a:

$\boxed{A}$ non esiste in $\mathbf{R}^*$ $\boxed{B}$ 0 $\boxed{C}$ $+\infty$ $\boxed{D}$ 2 $\boxed{E}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{F}$ 1

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	12
	B	9
	C	16
	D	6
	E	1
	F	12
	Non data	3

Soluzione del Quesito 3.

Il limite proposto non esiste, né finito né infinito, quindi la risposta corretta è: non esiste in $\mathbf{R}^*$.
Osserviamo che, per $x \to 0$, si ha:

$$e^{\sin x} - 1 \approx \sin x \approx x.$$

e

$$1 - \cos(\tan x) \approx \frac{(\tan x)^2}{2} \approx \frac{x^2}{2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{1 - \cos(\tan x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x}.$$

Notiamo però che:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$$

mentre:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty.$$

Quindi il limite richiesto non esiste perché il limite destro ed il limite sinistro sono diversi.

Quesito 4.

Il $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^4} - \cos x^2 + 6x^5}{\ln(1+x^5) + \ln^2(\cos x)}$ è uguale a:

$\boxed{A}$ 4 $\boxed{B}$ 6 $\boxed{C}$ 1 $\boxed{D}$ $+\infty$ $\boxed{E}$ 0 $\boxed{F}$ 2

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	10
	B	9
	C	2
	D	7
	E	14
	F	5
	Non data	12

Soluzione del Quesito 4.

Il limite proposto vale 4.
Per cominciare troviamo la parte principale del numeratore.
Per $x \to 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^4} - \cos x^2 + 6x^5 &= 1 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) + 6x^5 = \\ &= x^4 + o\left(x^4\right) + 6x^5 = x^4 + o\left(x^4\right) + o\left(x^4\right) = \\ &= x^4 + o\left(x^4\right) \approx x^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Per trattare il denominatore, invece, osserviamo per prima cosa che, per $x \to 0$, si ha:

$$\ln\left(1+x^5\right) = o\left(x^4\right), \tag{4}$$

perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^5\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^4} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\ln^2(\cos x) &= \left(\ln\left(1-(\cos x - 1)\right)\right)^2 = \left((\cos x - 1) + o\left(\cos x - 1\right)\right)^2 = \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) + o\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2 = \\
&= \frac{x^4}{4} - x^2 o\left(x^2\right) + \left(o\left(x^2\right)\right)^2 = \frac{x^4}{4} - o\left(x^4\right) + o\left(x^4\right) = \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Da (4) e (5) segue quindi che:

$$\ln(1+x^5) + \ln^2(\cos x) = o\left(x^4\right) + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) = \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) \approx \frac{x^4}{4}. \tag{6}$$

Di conseguenza, grazie a (3) e (6) possiamo concludere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \cos x^2 + 6x^5}{\ln(1+x^5) + \ln^2(\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\frac{x^4}{4}} = 4.$$

Quesito 5.

Il $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3} + \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ è uguale a:

A $-\frac{1}{\pi}$ B $\frac{2}{3\pi} - \frac{3\pi}{2}$ C $\frac{2}{3\pi}$ D $+\infty$ E 1 F non esiste in $\mathbf{R}^*$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	16
	B	6
	C	3
	D	14
	E	7
	F	0
	Non data	13

Soluzione del Quesito 5.

Il limite proposto vale $-\frac{1}{\pi}$.
Operando il cambio di variabile $y = x - 3$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3} + \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y + \cos(\pi(y+3))}{\sin(\pi(y+3))}.$$

Osserviamo però che:

$$\cos(\pi(y+3)) = \cos(\pi y + \pi + 2\pi) = \cos(\pi y + \pi) = -\cos(\pi y),$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo utilizzato la periodicità del coseno, mentre la terza segue dalla proprietà: $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$.
In modo del tutto analogo si ottiene la proprietà

$$\sin(\pi(y+3)) = -\sin(\pi y).$$

Di conseguenza, per il limite proposto si ottiene:

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y + \cos(\pi(y+3))}{\sin(\pi(y+3))}. = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - \cos(\pi y)}{-\sin(\pi y)}.$$

Osserviamo però che, per $y \to 0$, si ha:

$$-\sin \pi y \approx -\pi y$$

e

$$\begin{aligned}
e^y - \cos(\pi y) &= 1 + y + o(y) - 1 + \frac{(\pi y)^2}{2} + o\left((\pi y)^2\right) = \\
&= y + o(y) + \frac{(\pi y)^2}{2} + o\left(y^2\right) = y + o(y) + o(y) + o(y) = y + o(y) \approx y
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - \cos(\pi y)}{-\sin(\pi y)}. = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-\pi y} = -\frac{1}{\pi}.$$

Quesito 6.

Il $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \ln\frac{x+1}{x-1}$ è uguale a:

A 2 B 1 C $+\infty$ D 0 E e F e^2

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	23
	B	9
	C	13
	D	7
	E	1
	F	1
	Non data	5

Soluzione del Quesito 6.

Il limite proposto vale 2.
Osserviamo che, per $x \to +\infty$, si ha:

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\frac{x-1+2}{x-1} = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \approx \frac{2}{x-1}, \tag{7}$$

dove, nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che, se $\frac{2}{x-1} \to 0$ per $x \to +\infty$.
Grazie a (7) si ottiene:

$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \ln\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} x \cdot \frac{2}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2.$$

Quesito 7.

Il $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(\tan x)}{x}$ è uguale a:

A 0 B 1 C non esiste in $\mathbf{R}^*$ D $+\infty$ E π F $\frac{\pi}{2}$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	4
	B	30
	C	6
	D	2
	E	0
	F	3
	Non data	14

Soluzione del Quesito 7.

Il limite proposto vale 0.
Infatti, per tutti gli x per cui è definita, la funzione $\arctan(\tan x)$ soddisfa la disuguaglianza:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(\tan x) < \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

A questo punto, poichè $x \to +\infty$, possiamo supporre che x sia sempre positivo e quindi, dividendo tutti i membri della (8) per x si ottiene:

$$-\frac{\pi}{2x} < \frac{\arctan(\tan x)}{x} < \frac{\pi}{2x}.$$

Ma sia $-\frac{\pi}{2x}$ che $\frac{\pi}{2x}$ sono infinitesimi per $x \to +\infty$ quindi, grazie al criterio del confronto, otteniamo che che è infinitesimo anche $\frac{\arctan(\tan x)}{x}$.
Un errore che gli studenti fanno spesso è quello di ritenere che valga per ogni x l'uguaglianza

$$\arctan(\tan x) = x.$$

In realtà tale uguaglianza vale solo nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2x}, \frac{\pi}{2x}\right)$, visto che la funzione $\arctan x$ è definita come l'inversa della funzione $\tan x$ ristretta a tale intervallo. Per tutti gli altri x del suo dominio, la funzione $\arctan(\tan x)$, si ripete con periodo π.

Il suo grafico, infatti è quello rappresentato nella figura seguente:

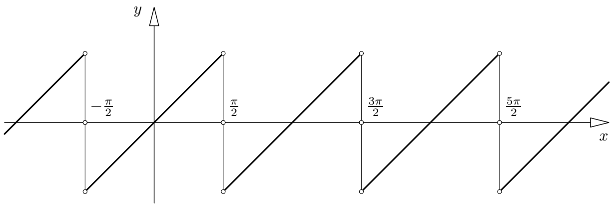


figura 1

Quesito 8.

Il $\lim_{x\to+\infty} 2^{x-1}\cdot(\ln(8+2^x)-\ln(4+2^x))$ è uguale a:

A 2 B $\frac{1}{4}$ C 1 D $\frac{1}{2}$ E 0 F $+\infty$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	7
	B	5
	C	1
	D	4
	E	6
	F	21
	Non data	15

Soluzione del Quesito 8.

Il limite proposto vale 2.

Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 2^{x-1}\cdot(\ln(8+2^x)-\ln(4+2^x)) &= \lim_{x\to+\infty} 2^{x-1}\cdot\ln\left(\frac{8+2^x}{4+2^x}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2^{x-1}\cdot\ln\left(1+\frac{4}{4+2^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2^{x-1}\cdot\frac{4}{4+2^x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2^x}{4+2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{4}{2^x}+1} = \frac{2}{0+1} = 2,\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che, per $x\to+\infty$, si ha $\frac{4}{4+2^x}\to 0$ e quindi

$$\ln\left(1+\frac{4}{4+2^x}\right)\approx\frac{4}{4+2^x}.$$

Quesito 9.

Date le funzioni f, g e h definite da $f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))$, $g(x)=\sqrt{\cos(x^2)}-1$ e $h(x)=\sqrt{1+\sqrt{\sin(x^6)}}-1$. Allora per $x\to 0$ si ha:

A $g(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(f(x))$ B $f(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(g(x))$ C $g(x)=o(f(x))$ e $f(x)=o(h(x))$ D $f(x)=o(g(x))$ e $g(x)=o(h(x))$ E $h(x)=o(f(x))$ e $f(x)=o(g(x))$ F $h(x)=o(g(x))$ e $g(x)=o(f(x))$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	8
	B	6
	C	6
	D	7
	E	3
	F	7
	Non data	22

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è: $g(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(f(x))$.
Infatti, applicando ripetutamente il fatto che, se $\varphi(x)\to 0$, allora $\sin\varphi(x)\approx\varphi(x)$, per $x\to 0$ si ha:

$$f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))\approx x.$$

Inoltre, poiché $\cos x^2\to 1$ per $x\to 0$, si ha:

$$g(x)=\sqrt{\cos x^2}-1=\sqrt{1-(\cos x^2-1)}-1\approx\frac{1}{2}(\cos x^2-1)\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{-(x^2)^2}{2}=-\frac{x^4}{4}.$$

Inoltre, poiché $\sqrt{\sin x^6}\to 0$ per $x\to 0$, si ha:

$$h(x)=\sqrt{1+\sqrt{\sin x^6}}-1\approx\frac{1}{2}\sqrt{\sin x^6}\approx\frac{1}{2}\sqrt{x^6}=\frac{1}{2}|x|^3.$$

Di conseguenza, per $x\to 0$, si ha $g(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(f(x))$.

Quesito 10.

Siano $f(x)=\ln^x(1+x)$, $g(x)=\ln(1+x^x)$ e $h(x)=x\ln x$. Allora, per $x\to+\infty$ si ha:

A $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine e $g(x)=o(f(x))$ B $f(x)$ $g(x)$ e $h(x)$ hanno tutte lo stesso ordine C $h(x)=o(g(x))$ e $g(x)=o(f(x))$ D $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine e $f(x)=o(h(x))$ E $f(x)=o(h(x))$ e $h(x)=o(g(x))$ F $h(x)=o(f(x))$ e $f(x)=o(g(x))$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	13
	B	4
	C	8
	D	9
	E	3
	F	2
	Non data	20

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine e $g(x)=o(f(x))$.
Per mostrare che $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine (anzi, che sono asintoticamente equivalenti) osserviamo che, per $x\to+\infty$, si ha che $x^x\to+\infty$ e quindi

$$\begin{aligned}g(x)=\ln(1+x^x)&=\ln\left(x^x\cdot\left(\frac{1}{x^x}+1\right)\right)=\ln(x^x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^x}\right)=\\&=x\ln x+o(1)\approx x\ln x=h(x).\end{aligned}$$

Invece, per mostrare che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore, basta osservare che, poiché per $x \to +\infty$ si ha $\ln(1+x) \to +\infty$, si avrà anche che, definitivamente per $x \to +\infty$, vale la disuguaglianza

$$\ln(1+x) > 2,$$

e quindi anche

$$\ln^x(1+x) > 2^x. \tag{9}$$

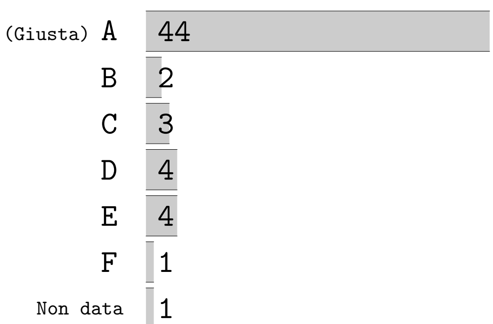
Di conseguenza, grazie al fatto (noto) che $x \ln x = o(2^x)$ per $x \to +\infty$, dalla (9) segue che $x \ln x$ è anche $o(\ln^x(1+x))$.
Possiamo quindi riassumere il tutto dicendo che, per $x \to +\infty$, $h(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso ordine e sono entrambe $o(f(x))$.

Quesito 11.

Si considerino le affermazioni:
(a) $x^8 = o(x^9)$ per $x \to 0$;
(b) $x^8 = o(x^9)$ per $x \to +\infty$;
(c) $x^8 = o(x^7)$ per $x \to -\infty$.
Allora quelle vere sono:

[A] solo **(b)** [B] solo **(a)** [C] nessuna [D] solo **(c)** [E] solo **(a)** e **(c)** [F] tutte

Distribuzione delle risposte



Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è: solo **(b)**.
Infatti, per $x \to +\infty$ si ha $x^8 = o(x^9)$, perché:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^8}{x^9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Invece, per $x \to 0$, x^8 non è $o(x^9)$, perché:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^9} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

e tale limite non vale 0: infatti per $x \to 0^+$ vale $+\infty$ mentre per $x \to 0^-$ vale $-\infty$, quindi non esiste.
Infine, per $x \to -\infty$, x^8 non è $o(x^7)$, perché:

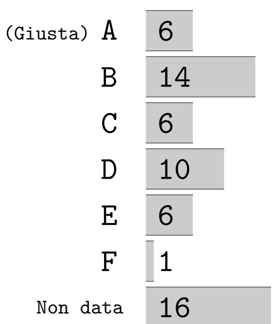
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^8}{x^7} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

Quesito 12.

Sia $f(x) = \tan x + |\sin x|$. Si considerino le affermazioni:
(a) $f(x) = O(x)$ per $x \to 0$;
(b) $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$;
(c) $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0^-$.
Allora quelle vere sono:

[A] solo **(a)** e **(c)** [B] solo **(a)** [C] nessuna [D] solo **(c)** [E] solo **(a)** e **(b)** [F] tutte

Distribuzione delle risposte



Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: solo **(a)** e **(c)**.
Osserviamo infatti che, per $x \to 0^+$, $\sin x$ è definitivamente positivo, quindi, definitivamente si ha:

$$f(x) = \tan x + \sin x = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \approx 2x.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\tan x + \sin x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{x} = 2. \tag{10}$$

Invece, per $x \to 0^-$, $\sin x$ è definitivamente negativo, quindi, definitivamente si ha:

$$f(x) = \tan x - \sin x \approx \frac{x^3}{2}, \tag{11}$$

dove abbiamo utilizzato il limite notevole

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3}{2x} = 0. \tag{12}$$

Mettendo insieme (10) e (12), si può concludere che, per $x \to 0$, il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definitivamente limitato, quindi $f(x) = O(x)$, cioè è vera **(a)**.
Invece **(b)** è falsa, perchè a causa di (10), non è vero che $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, quindi $f(x)$ non è $o(x)$.
Infine **(c)** è vera perché, grazie a (11) si ha:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to0^-} \frac{x}{2} = 0.$$

5. Svolgimenti e note sulla II parte

Soluzione del Problema 1.

Il limite proposto vale 1.
Infatti, per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\tan x - \sin x \approx \frac{x^3}{2}\\
&1 - \cos x^2 + x^4 = \frac{(x^2)^2}{2} + o\left((x^2)^2\right) + x^4 = \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x^4 = \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \approx \frac{3}{2}x^4\\
&\ln\left(\frac{2x+1}{1-x}\right) = \ln\left(1 + \frac{3x}{1-x}\right) \approx \frac{3x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene:

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{1 - \cos x^2 + x^4} \cdot \ln\left(\frac{2x+1}{1-x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{3}{2}x^4} \cdot \frac{3x}{1-x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{1-x} = 1.$$

Soluzione del Problema 2.

Il limite proposto vale 1.
Per cominciare osserviamo che, per $x \to +\infty$, $x^3 - \sqrt{x^6+1}$ è $o(x^2)$, perché:

$$x^3 - \sqrt{x^6+1} = -x^3 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^6}} - 1\right) \approx -x^3 \cdot \frac{1}{2x^6} = -\frac{1}{2x^3} = o(1) = o(x^2)$$

Lo stesso si ottiene per $\ln(1 + e^{-x})$ perché, per $x \to +\infty$, si ha:

$$\ln(1 + e^{-x}) \approx e^{-x} = o(1) = o(x^2),$$

dove nel primo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to +\infty$, e^{-x} è infinitesimo, per poter applicare la formula $\ln(1 + f(x)) \approx f(x)$.
Anche $\sqrt{x^3+1}$ e $\ln(1 + e^x)$ sono $o(x^2)$ per $x \to +\infty$.
Infatti, una volta osservato che, poiché $x \to +\infty$, si può supporre che sia $x > 0$, si ottiene:

$$\sqrt{x^3+1} = \sqrt{x^3\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} \approx \sqrt{x^3} = o(x^2)$$

e

$$\ln(1 + e^x) = \ln\left(e^x \cdot \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right) = \ln e^x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = x + o(1) \approx x = o(x^2),$$

Invece, per quanto riguarda il termine $x\sqrt{x^2+1}$, si ha:

$$x\sqrt{x^2+1} = x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x^2(1 + o(1)) = x^2 + o(x^2).$$

Utilizzando tutte le informazioni sin qui trovate per sostituire nel limite richiesto si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x^6+1} + x^2 + \ln(1 + e^{-x})}{\sqrt{x^3+1} + \ln(1 + e^x) + x\sqrt{x^2+1}} =\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{o(x^2) + x^2 + o(x^2)}{o(x^2) + o(x^2) + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.
\end{aligned}$$

Soluzione del Problema 3.

Per $x \to 0^+$, $f(x)$ e $h(x)$ sono asintoticamente equivalenti, mentre $g(x)$ è o-piccolo sia di $f(x)$ che di $h(x)$.
Infatti, per $x \to 0^+$, sia $f(x)$ che $h(x)$ sono asintoticamente equivalenti ad x, perché

$$f(x) = \sqrt{1+2x} - 1 \approx \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

e

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{|x|} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - |x|\right)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x} \approx \frac{x}{\sqrt{0+1}+0} = x,$$

dove per $h(x)$, quando si è scritto x al posto di $|x|$, si è tenuto conto del fatto che $x > 0$, in quanto $x \to 0^+$.
Invece $g(x) = o\,(x)$.
Infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1+\frac{1}{\ln|\ln x|}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln|\ln x|}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln|\ln x|}\cdot \ln x} = e^{-\infty} = 0,$$

dove, il fatto che $\dfrac{1}{\ln|\ln x|} \cdot \ln x \to -\infty$, si giustifica operando il cambio di variabile $y = -\ln x$ nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln|\ln x|} \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{-\ln x}{\ln(-\ln x)} = \lim_{y\to +\infty} -\frac{y}{\ln y} = -\infty.$$

Possiamo quindi concludere che, per $x \to 0^+$, $f(x)$ e $h(x)$ sono asintoticamente equivalenti (perché entrambe asintoticamente equivalenti ad x), mentre $g(x)$ è o-piccolo sia di $f(x)$ che di $h(x)$ (perché è $o\,(x)$).

Soluzione del Problema 4.

L'affermazione (1) è vera mentre la (2) è falsa.
Per mostrare che (1) è vera basta osservare che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1 - 1 = 0.$$

Invece, per mostrare che (2) è falsa basta prendere come controesempio $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x$.
In tal caso si ha, ovviamente, che $f(x) \approx g(x)$ per $x \to +\infty$, visto che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Tuttavia

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to +\infty} (x + 1 - x) = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1 \neq 0.$$